ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Т.А. Дулалаева

О СЕТИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ НА ПАРЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.П.Фиников в работах [1], [2] изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве. В предлагаемой статье мы исследуем сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного пространства P_4.

1. Пусть в проективном пространстве P_4 заданы две гладкие гиперповерхности V_3 и $\overline{V}_3$ и диффеоморфизм $f: V_3 \to \overline{V}_3$ такой,что $f(A) \neq A$, $\forall A \in V_3$. Присоединим к паре этих гиперповерхностей подвижной проективный репер $R = \{A, A_1, \ldots, A_4\}$, где $A \in V_3$, $A_4 \in \overline{V}_3$, $A_4 = f(A)$, $A_i \in P_2(A)$ $(i,j,k = 1,2,3)$, где $P_2(A)$ – пересечение касательных гиперплоскостей к V_3 и $\overline{V}_3$, взятых соответственно в точках A и A_4. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями:

$$
\begin{aligned}
dA &= \omega_0^0 A + \omega^i A_i, \\
dA_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j + \omega_i^4 A_4, \\
dA_4 &= \qquad\quad \omega_4^i A_i + \omega_4^4 A_4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Если зафиксировать точку A (положить $\omega^i = 0$),то будут фиксированы точка A_4 и плоскость $P_2(A)$. Следовательно,система дифференциальных уравнений,определяющая нашу пару гиперповерхностей,примет вид:

$$\omega^4 = 0, \quad \omega_4^0 = 0, \tag{2}$$

$$\omega_i^0 = a_{ij}\omega^j, \quad \omega_i^4 = b_{ij}\omega^j, \tag{3}$$

$$\omega_4^i = c_j^i \omega^j. \tag{4}$$

Точка A_4 описывает гиперповерхность $\overline{V}_3$, поэтому из последней формулы (1) следует,что 1- формы ω_4^i линейно независимы и,значит, в формуле (4) имеем $\det \| c_j^i \| \neq 0$.

Продолжая уравнения (3), находим

$$d a_{ij} + 2 a_{ij}\omega_0^0 - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k = a_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$

$$d b_{ij} + b_{ij}(\omega_0^0 + \omega_4^4) - b_{kj}\omega_i^k - b_{ik}\omega_j^k = b_{ijk}\omega^k, \tag{6}$$

где a_{ijk} и b_{ijk} симметричны по двум последним индексам. Из уравнений (5),(6) следует,что каждая из систем функций $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ образует тензор. Продолжая уравнения (2), получим , что тензор b_{ij} симметричный и

$$a_{ij} c_k^i = a_{ik} c_j^i. \tag{7}$$

Продолжая уравнения (4), находим

$$dc_j^i + c_j^i(\omega_0^0 - \omega_4^4) + c_j^k \omega_k^i - c_k^i \omega_j^k = c_{jk}^i \omega^k, \tag{8}$$

где $c_{jk}^i = c_{kj}^i$.

Как показывают уравнения (8), система функций $\{c_j^i\}$ образует тензор.

2. Линия $\gamma \subset V_3$, как и линия $f(\gamma) \subset \overline{V}_3$, называется двойной линией [1] отображения f ,если в каждой точке $A \in \gamma$ касательная к линии γ в этой точке пересекает касательную к линии $f(\gamma)$ в точке $f(A)$. Ясно,что точка пересечения этих касательных принадлежит плоскости.

В.Т.Базылев в работе [3] показал,что двойные линии отображения f высекаются на гиперповерхностях V_3 и $\overline{V}_3$ развертывающимися поверхностями семейства прямых (AA_4).

Пусть точка $F = \lambda A + A_4$ является фокусом [3] прямой (AA_4), т.е. описывает ребро возврата некоторой развертывающейся поверхности семейства прямых (AA_4). Следовательно, $dF \in (AA_4)$, когда точка A смещается в некотором направлении на поверхности V_3. Имеем следующую систему уравнений:

$$(c_j^i + \lambda \delta_j^i)\,\omega^j = 0, \tag{9}$$

где формы ω^j не обращаются в нуль одновременно. Поэтому λ является корнем уравнения

$$\det \| c_j^i + \lambda \delta_j^i \| = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет степень 3 относительно λ . Точка A_4 не является фокусом прямой (AA_4), так как $\det\|c^i_j\|\neq 0$. Допустим, что все корни уравнения (10) различны. Тогда система (9) определяет на поверхности V_3 3 линейно независимых одномерных распределения, интегральные кривые которых образуют на этой поверхности сеть σ_3 двойных линий отображения f . Сеть $\bar\sigma_3 = f(\sigma_3)$ является сетью двойных линий на поверхности

Поместим вершины A_i репера R в точках пересечения касательных к соответствующим линиям сетей σ_3 и $\bar\sigma_3$. Тогда $c^i_j = 0, (i\neq j)$. Обозначим $c^i_i = c^i$, уравнение (4) принимает вид:

$$\omega^i_4 = c^i\omega^i. \qquad (4')$$

Из уравнений (8) находим

$$(c^j - c^i)\,\omega^i_j = c^i_{jk}\,\omega^k,\ (i\neq j). \qquad (11)$$

Следовательно, формы ω^i_j – главные. Пусть

$$\omega^i_j = a^i_{jk}\,\omega^k,\quad (i\neq j). \qquad (12)$$

Используя симметричность c^i_{jk} по нижним индексам, из уравнений (11), (12) получим:

$$(c^j - c^i)\,a^i_{jk} = (c^k - c^i)\,a^i_{kj}. \qquad (13)$$

Объект неголономности сети:

$$\nu^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj},\quad (k\neq i,j)$$

принимает вид:

$$\nu^i_{jk} = \frac{c^k - c^j}{c^k - c^i}\,a^i_{jk}. \qquad (14)$$

Отсюда $\nu^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow a^i_{jk} = 0$, (i, j, k – различны)

Значит справедлива следующая теорема.

Если фокусы прямой (AA_4) различны, то сеть σ_3 двойных линий голономна тогда и только тогда, когда она является ∇ - сопряженной системой [4] относительно аффинной связности ∇ , индуцированной на V_3 нормализацией [5] этой гиперповерхности при помощи поля нормалей 1 рода (AA_4) и поля нормалей II рода $P_2(A)$.

При этом сеть $\bar\sigma_3$ также является $\bar\nabla$ – сопряженной системой относительно аффинной связности $\bar\nabla$, индуцированной на поверхности $\bar V_3$ нормализацией при помощи поля нормалей 1 рода $(A_4 A)$ и поля нормалей II рода $P_2(A)$.

3. Точки $F^i = -c^i A + A_4$ являются фокусами прямой (AA_4) . Точка A_4 является гармоническим полюсом [6] точки A относительно фокусов этой прямой тогда и только тогда, когда

$$\sum_i c^i = 0.$$

Точку F^j_i $(i\neq j)$ называют псевдофокусом [6] прямой (AA_i), если при смещении точки A в направлении AA_j дифференциал точки принадлежит гиперплоскости $[AA_1\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_4]$, т.е. не содержит компоненты по вершине A_j . На каждой касательной (AA_i) к линиям сети σ_3 существует 2 псевдофокуса F^j_i , $i\neq j$

$$F^j_i = -a^j_{ij}A + A_i.$$

Аналогично, на каждой касательной $(A_4 A_i)$ к линиям сети существует 2 псевдофокуса $\bar F^j_i$, $i\neq j$

$$\bar F^j_i = -\frac{a^j_{ij}}{c^j}A_4 + A_i.$$

Прямая, проходящая через соответствующие псевдофокусы, пересекает (AA_4) в ее фокусах, а именно,

$$(F^j_i \bar F^j_i)\cap(AA_4) = F^j.$$

Прямые $(F^j_i \bar F^j_i)$, $(F^k_i \bar F^k_i)$ пересекаются в точке

$$M_i = (c^j a^k_{ik} - c^k a^j_{ij})A + (c^k - c^j)A_i + (a^j_{ij} - a^k_{ik})A_4$$

(i, j, k - различны).

Точки M_i $(i = 1, 2, 3)$ определяют некоторую плоскость.

На каждой прямой (AA_i), касательной в точке A к линии сети σ_3 , определяется точка

$$F_i = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} a^j_{ij}A + A_i$$

- гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов этой прямой. Точка

$$\bar F_i = -\frac{1}{2}\sum \frac{a^j_{ij}}{c^j}A_4 + A_i$$

является гармоническим полюсом точки A_4 относительно псевдофокусов прямой $(A_4 A_i)$.

Прямая, соединяющая соответствующие гармонические полюсы, пересекает (AA_4) в точке

$$F_i^* = \sum_{j\neq i} a_{ij}^j A - \sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{c^j} A_4 .$$

На прямых $(AA_i), (A_4A_i), (AA_4)$ возникают следующие инварианты:

$$(A_iF_i, F_i^jF_i^\kappa) = (A_4F_i^*, F^jF^\kappa),$$

$$(A_i\bar{F}_i, \bar{F}_i^j\bar{F}_i^\kappa) = (AF_i^*, F^jF^\kappa)$$

(i, j, κ – различны).

В частности, если псевдофокусы на прямой (AA_i) совпадают, то точки A_4 и F_i^* гармонически разделяют пару F^j и F^κ фокусов прямой (AA_4).

4. Зададим направление $\omega^\kappa = 0$, $\omega^j + \lambda\omega^i = 0$ (i, j, κ различны) на поверхности V_3 и соответствующее ему направление на $\bar{V}_3$.

При смещении точки A по заданному направлению имеем:

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^i (A_i - \lambda A_j),$$

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega^i (c^iA_i - \lambda c^jA_j)$$

(нет суммирования).

Обозначим $B = A_i - \lambda A_j$, $C = c^iA_i - \lambda c^jA_j$. (16)

Тогда

$$(A_iA_j ; BC) = \frac{1}{(AA_4, F^iF^j)} .$$

Пара точек A_i и A_j гармонически разделяет пару точек B и C тогда и только тогда, когда

$$c^i + c^j = 0 .$$

5. Рассмотрим случай, когда два фокуса прямой (AA_4) совпадают, пусть $F^2 = F^3$.

Наша пара гиперповерхностей определяется системой дифференциальных уравнений (2),(3),(4′) и конечными соотношениями:

$$c^ia_{ij} = c^ja_{ji} \quad \text{(нет суммирования)},$$

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c^2 = c^3.$$

Произвол существования такой пары – две функции трех аргументов. Формы $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_1^2, \omega_1^3$ являются главными, причем

$$a_{32}^1 = a_{23}^1, \; a_{13}^3 = a_{12}^2, \; a_{13}^2 = a_{12}^3 = 0 .$$

Откуда следует, что уравнение $\omega^1 = 0$ вполне интегрируемо, оно определяет расслоение гиперповерхностей V_3 и $\bar{V}_3$ на ∞^1 поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$, любая линия на которых является двой-

ной (см. (16) при $c^i = c^j$). Поверхности V_2 и $\bar{V}_2$ расположены перспективно с центром перспективы в точке F^2.

Псевдофокусы на прямых (AA_i) и (A_4A_i) совпадают, т.е.

$$F_1^2 = F_1^3, \; \bar{F}_1^2 = \bar{F}_1^3.$$

Прямые $(AA_1), (A_4A_1)$ при смещении их вдоль линий ω^2, ω^3 сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$ не выходят инфинитезимально из гиперплоскостей $[AA_1A_2A_4]$, $[AA_1A_3A_4]$ соответственно.

6. Составим систему дифференциальных уравнений, определяющих пару гиперповерхностей V_3, $\bar{V}_3$ с асимптотически-сопряженной системой двойных линий. Линия ω^i сети σ_3 является асимптотической на поверхности V_3 тогда и только тогда, когда

$$b_{ii} = 0 . \qquad (17)$$

Направления (A_4A_i) и (A_4A_j) сопряжены на поверхности тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j) . \qquad (18)$$

Итак, пара гиперповерхностей с асимптотически-сопряженной системой двойных линий определяется системой дифференциальных уравнений (2),(3),(4) и конечными соотношениями (17),(18).

Произвол существования такой пары – шесть функций двух аргументов.

Строение форм ω_j^i $(i \neq j)$ показывает, что

$$a_{32}^1 = \frac{c^2 - c^1}{c^3 - c^1} a_{23}^1 , \quad a_{31}^2 = \frac{c^1 - c^2}{c^3 - c^2} a_{13}^2 ,$$

$$a_{12}^3 = \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{c^3 - c^2}{c^3 - c^1} a_{23}^1 + \frac{a_{22}}{a_{33}} a_{13}^2 ,$$

$$a_{21}^3 = \frac{a_{11}}{a_{33}} a_{23}^1 + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{c^1 - c^3}{c^2 - c^3} a_{13}^2 .$$

Отсюда следует, что если прямая (AA_1) при смещении ее вдоль линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_1A_3A_4]$, т.е. $a_{13}^2 = 0$, то фокусу $\bar{A}_1^3$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^3 сети $\bar{\sigma}_3$ и $\bar{A}_1^3 = \bar{F}_1^3$, а если и прямая (AA_2) при смещении ее вдоль той же линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_2A_3A_4]$, т.е. $a_{23}^1 = 0$, то фокусу $\bar{A}_2^3$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^3 сети $\bar{\sigma}_3$ и $\bar{A}_2^3 = \bar{F}_2^3$.

Тогда фокусу $\bar{A}_i^j$ соответствует смещение точки A_4 вдоль линии ω^j сети $\bar{\sigma}_3$ и $\bar{A}_i^j = \bar{F}_i^j$.

При этих же условиях каждое уравнение $\omega^i=0$ будет вполне интегрируемо, следовательно, сеть двойных линий σ_3 голономна. Тогда она и ∇ -сопряженная система относительно указанной выше аффинной связности ∇. Такое же заключение можно сделать и относительно сети $\bar{\sigma}_3$.

7. Рассмотрим случай, когда на каждой гиперповерхности V_3 и $\bar{V}_3$ сеть двойных линий является сопряженной. Такая пара гиперповерхностей определяется системой дифференциальных уравнений (2),(3),(4) и конечными соотношениями $b_{ij}=0$, $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$. Произвол существования такой пары - одна функция трех аргументов.

При этом структура форм ω^i_j $(i\neq j)$ такая, что

$$a^1_{32}=\frac{c^2-c^1}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^2_{13}=-\frac{a_{11}b_{33}-a_{33}b_{11}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\cdot\frac{c^3-c^2}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^2_{31}=\frac{a_{11}b_{33}-a_{33}b_{11}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\,\frac{c^2-c^1}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^3_{12}=\frac{a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\cdot\frac{c^3-c^2}{c^3-c^1}\,a^1_{23},$$

$$a^3_{21}=\frac{a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22}}{a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}}\,a^1_{23}.$$

Отсюда заключаем, что если прямая (AA_2) при смещении ее вдоль линии ω^3 сети σ_3 не выходит инфинитезимально из гиперплоскости $[AA_2A_3A_4]$, т.е. $a^1_{23}=0$, то фокусы A^3_2, $\bar{A}^3_2$ соответствуют смещениям точек A, A_4 вдоль линии ω^3 сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$ соответственно и $A^3_2=F^3_2$, $\bar{A}^3_2=\bar{F}^3_2$. Тогда фокусы A^j_i, $\bar{A}^j_i$ соответствуют смещениям точек A, A_4 вдоль линии ω^j сети σ_3, $\bar{\sigma}_3$ соответственно и $A^j_i=F^j_i$, $\bar{A}^j_i=\bar{F}^j_i$.

В этом случае каждое уравнение $\omega^i=0$ вполне интегрируемо; сеть двойных линий σ_3 является ∇ -сопряженной системой относительно аффинной связности $\bar{\nabla}$. Такое же заключение можно сделать и относительно сети $\bar{\sigma}_3$.

Список литературы

1. Фиников С.П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей и о соответствии А поверхностей.- Матем.сб., 1939, т.6, вып.3, с.475-520.

2. Фиников С.П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева.-"Учен.зап.гор.пед.ин-та", 1951, 16, вып.3, с.235-260.

3. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.6, Калининград, 1975, с.19-25.

4. Базылев В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространствах аффинной связности.-"Известия высш.учеб.заведений.Математика", 1974, № 5 (144), с.25-30.

5. Базылев В.Т. О нормализациях проективного пространства, порожденных заданной в нем сетью.-Литовский матем.сб., 6:3, 1966, с.313-321.

6. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Известия высш.учеб.заведений, Математика", 1966, 2(51), с.9-19.